
COMPLEXO DE ENSINO ED/HC/FARN
COORDENAÇÃO DO ENSINO MÉDIO
Prof. Agamenon Tavares
Matemática
Agamenon Tavares

Agamenon Tavares

LOGARITMOS

Vamos resolver algumas equações exponenciais:

a) $4^{2\mathbf{x}-1} = 8^{\mathbf{x}+2}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2\mathbf{x}-1} = 9^{\mathbf{x}+2}$

c) $2^{\mathbf{x}} = 5^{\mathbf{x}+2}$

As duas primeiras têm solução relativamente simples:

a) **x** = 8

b) **x** = - 3/4

No entanto, a 3ª revela uma dificuldade até agora não vista:

As bases não são iguais, nem potências exatas uma da outra.

Para resolver situações como a anterior, vamos estudar uma nova teoria: a dos *Logaritmos*.

Para tanto vamos definir a função inversa da exponencial.

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}^{\mathbf{x}}, \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{a}^{\mathbf{y}}$$

Como isolar o novo y?

Ou seja, a que expoente (y) devemos elevar o número "a", para obtermos o resultado (x) desejado?

Agamenon Tavares

A resposta nos foi dada através de uma nova operação, definida a seguir:

$$\underbrace{\log_{\mathbf{a}} \mathbf{x}} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{a}^{\mathbf{y}} = \mathbf{x}, \text{ tal que } \begin{cases} 0 < \mathbf{a} \neq 1 \\ \mathbf{x} > 0 \end{cases}$$

Lê-se, logaritmo de **x** na base **a**

Por exemplo:

$\log_2 8 = 3$, pois $2^3 = 8$

$\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$

Agamenon Tavares

Conseqüências da definição:

$$\log_{a} a = 1$$

$$\log_{a} a^{n} = n$$

$$\log_{a} 1 = 0$$

$$b^{\log_{b} a} = a$$

$$\underbrace{\log_{c} a = \log_{c} b \Rightarrow a = b}_{\text{Equações logarítmicas}}$$

Agamenon Tavares

Propriedades operatórias:

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_c \left({}^{a}\!/_{b} \right) = \log_c a - \log_c b$$

$$\log_b a^n = n \cdot \log_b a$$

$$\textbf{Obs.}: \log_b \sqrt[n]{a^m} = \log_b \left(a^{m/n} \right) = \left(\frac{m}{n} \right) \cdot \log_b a$$

Agamenon Tavares

Mudança de base:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\textbf{Obs.}: \log_{(b^n)} a = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \log_b a$$

$$\textbf{Obs.}: \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Agamenon Tavares

Função logarítmica:

A função **f**: $\mathbb{IR}_+ \rightarrow \mathbb{IR}$ definida por $f(x) = \log_a \mathbf{x}$, com $a \in \mathbb{IR}_+$ e $a \neq 1$, é chamada ***função logarítmica de base a***. O domínio dessa função é o conjunto $\mathbb{IR}_+$ (reais positivos) e o contradomínio é IR (reais).

Agamenon Tavares

Gráfico Cartesiano da Função Logarítmica

Temos 2 casos a considerar:

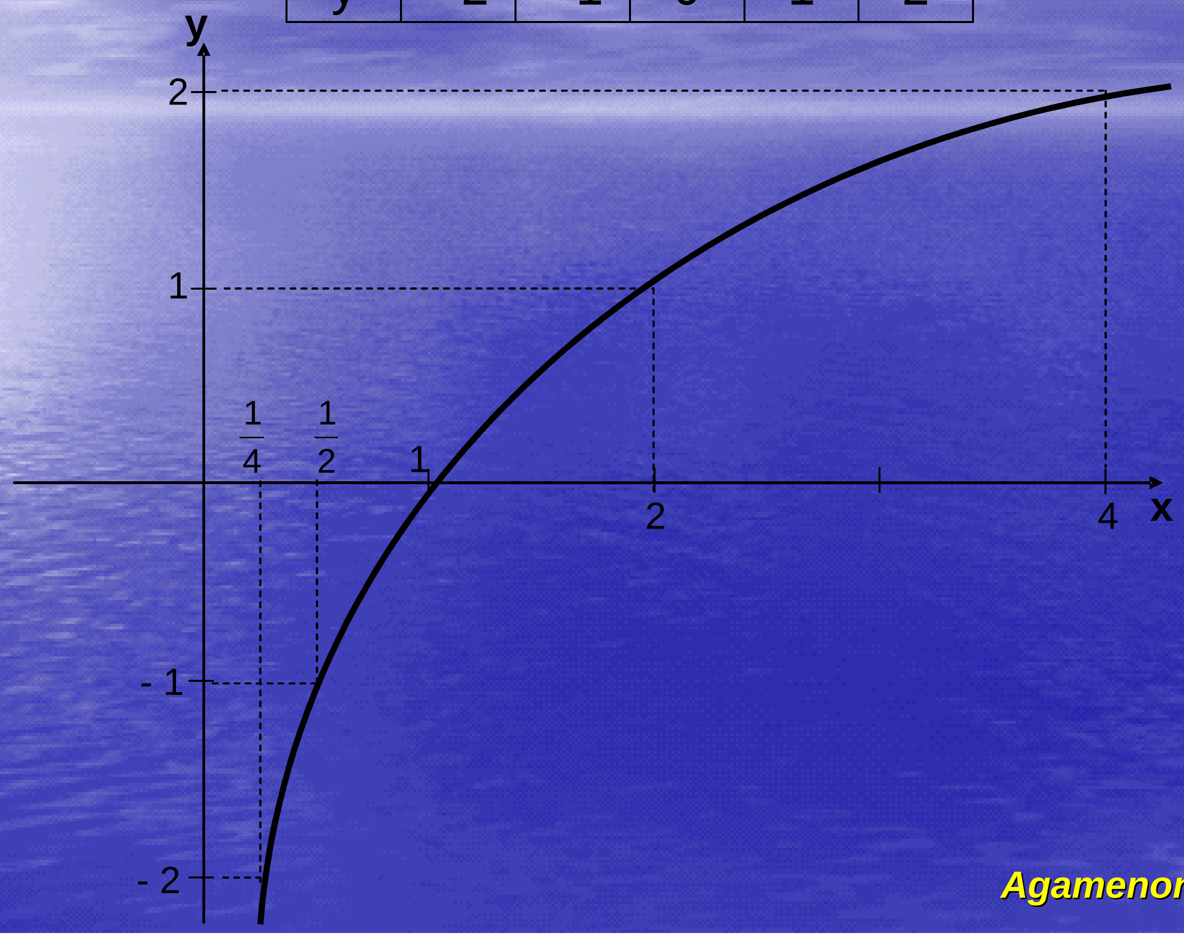
- ➔ quando $a > 1$;
- ➔ quando $0 < a < 1$.

Acompanhe os exemplos seguintes:

$\mathbf{y = \log_2 x}$ (nesse caso, $a = 2$, logo $a > 1$)

Atribuindo alguns valores a **x** e calculando os correspondentes valores de **y**, obtemos a tabela e o gráfico a seguir:

x	1/4	1/2	1	2	4
y	- 2	- 1	0	1	2



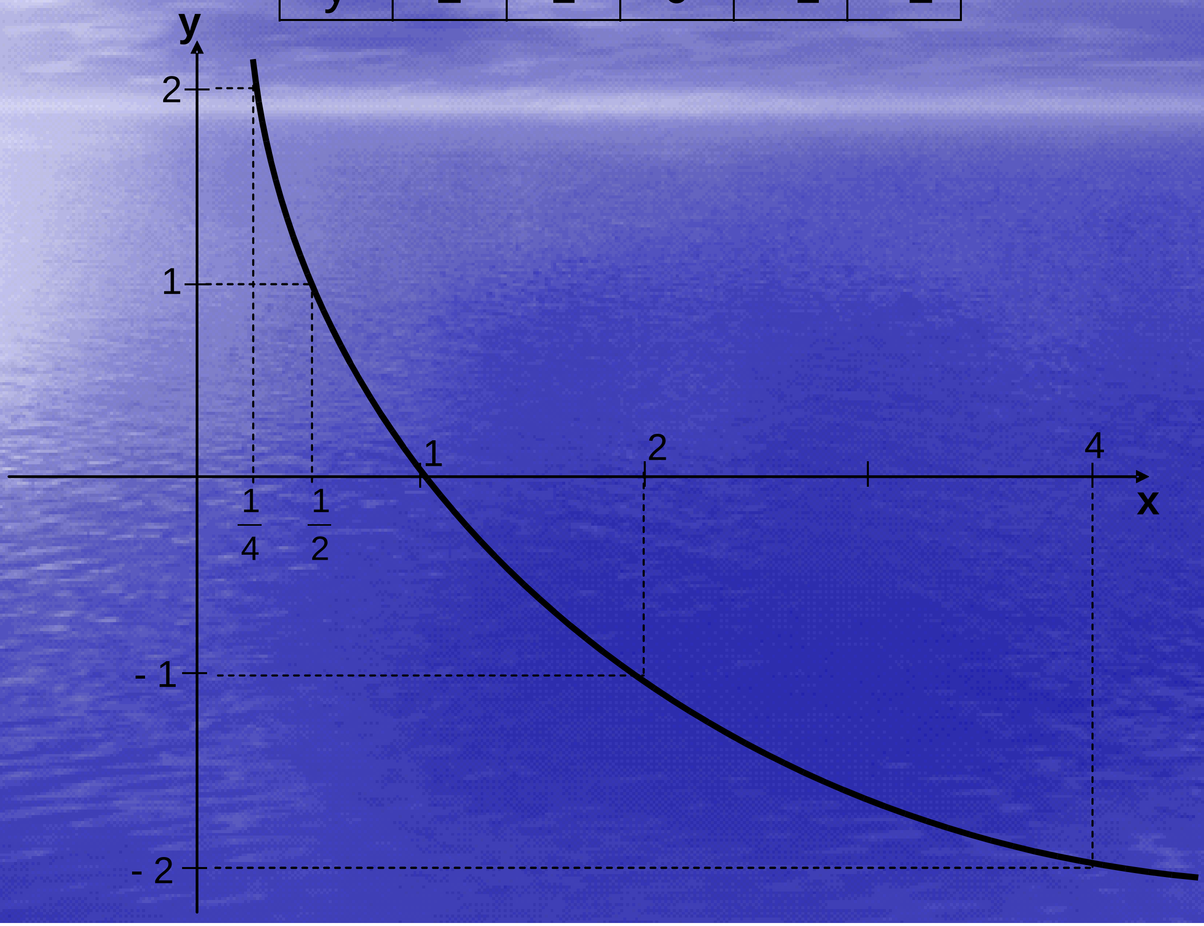
Agamenon Tavares

$y = \log_{1/2} \mathbf{x}$ (nesse caso, $a = 1/2$, logo $0 < a < 1$)

Atribuindo alguns valores a **x** e calculando os correspondentes valores de **y**, obtemos a tabela e o gráfico a seguir:

Agamenon Tavares

x	1/4	1/2	1	2	4
y	2	1	0	- 1	- 2



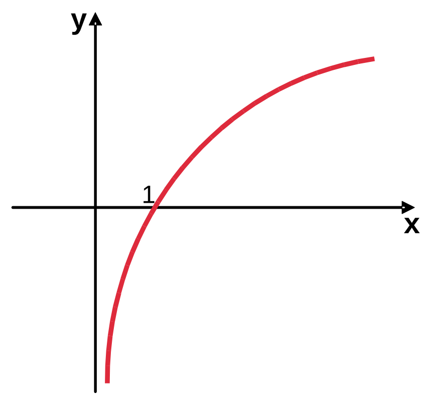
Nos dois exemplos, podemos observar que:

→O gráfico **nunca** intercecta o eixo vertical (Assíntota no eixo **y)**;

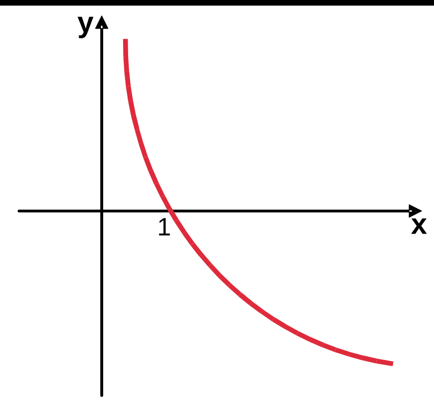
→O gráfico corta o eixo horizontal no ponto (1,0);

→Os valores de **x** são **sempre positivos** (Condição de existência do logaritmo), portanto o conjunto domínio D = IR_+.

Além disso, podemos estabelecer o seguinte:



f(x) é crescente se a > 1



f(x) é decrescente se 0 < a < 1

Agamenon Tavares

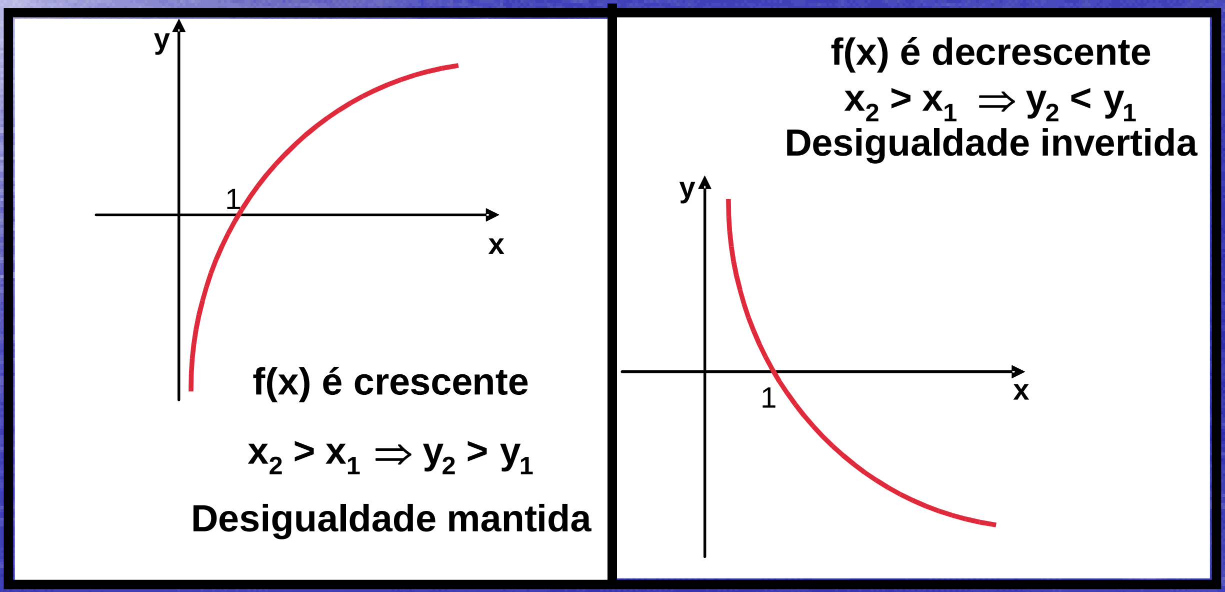
INEQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

Agamenon Tavares

Para resolvermos inequações logarítmicas devemos:

→ Reduzir os dois membros da inequação a logaritmos de mesma base;

→ Proceder conforme a ilustração abaixo.



Portanto, nos exemplos abaixo usaremos essa lógica:

a > 1	**0 < a < 1**
$\log_a m > \log_a n \Rightarrow m > n$ (as desigualdades têm mesmo sentido)	$\log_a m > \log_a n \Rightarrow m < n$ (as desigualdades têm sentidos diferentes)

1) $\log_3(2\mathbf{x}-4) > \log_3(x+1)$ (a solução é $\mathbf{x} > 5$)

2) $\log_{0,8}(3\mathbf{x}) \leq \log_{0,8}(x+1)$ (a solução é $\mathbf{x} > \frac{1}{2}$)

3) $\log_4(2\mathbf{x}-\mathbf{x}^2) \geq \log_2 x$ (que é satisfeita para $0 \leq x \leq 1$)

Obs.: SEMPRE OBSERVE A CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DO LOGARITMO

Agamenon Tavares

Uma aplicação de Função Logarítmica

A intensidade **I** de um terremoto, medida na escala Richter, é um número que varia de **I** = 0 até **I** = 8,9 para o maior terremoto conhecido. **I** é dado pela fórmula:

$$\mathbf{I} = \frac{2}{3}\log_{10}\left(\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{E}_0}\right)$$

Na qual **E** é a energia liberada no terremoto em quilowatt/hora e $\mathbf{E}_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

a) Qual a energia liberada num terremoto de intensidade 8 na escala Richter?

b) Aumentando de uma unidade a intensidade do terremoto, por quanto fica multiplicada a energia liberada?

Agamenon Tavares